



Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 5

Aufgabe 5.1. Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $0 < \nu(A) \leq \varepsilon$ und A dicht in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 5.2. Sei C Cantors Menge. Explizit: Sei $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, wo

$$C_0 := [0, 1];$$

$$C_{n+1} := \bigcup_{k=1, \dots, m_n} P(Q_k);$$

$$C_n = \bigcup_{k=1, \dots, m_n} Q_{nk};$$

$\{Q_{nk} | k \in \{1, \dots, m_n\}\}$ die Menge aller Komponenten von C_n ist (eine Komponente einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von M die maximal zusammenhängend ist);

für ein interval $I = [a, b] \in \mathbb{R}$, $P(I) := [a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \cup [\frac{2}{3}(b-a), b]$.

Zeigen Sie, dass

1. C ist Kompakt.
2. C ist überabzählbar.
3. C ist eine Nullmenge.

Aufgabe 5.3. Für jede $k \in \mathbb{N}$, sei $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f_k(x) := \begin{cases} \sin^k(k\pi x) & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist L^1 konvergent gegen die Funktion 0.

Aufgabe 5.4. Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \int |f_k| dx < \infty$. Zeigen Sie, dass die Reihe $(\sum_{k=0}^N f_k)_{N \in \mathbb{N}}$ in L^1 gegen eine integrierbare Funktion $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert. Ausserdem, es gilt $\int \sum_{k=0}^{\infty} f_k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k dx$.



Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium 5

Lösungsskizze

Aufgabe 5.1. Sei $N: (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}^n$ eine bijektion. Sei $\varepsilon > 0$. OBdA, sei $\varepsilon < 1$. Ausserdem, für jede $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei $Q_i := [N(i) - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, N(i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}]^n$. Wir behaupten, dass $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} Q_i$ die gewünschte Eigenschaften besitzt:

0. Man beobachtet, dass $\forall i \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}). v(Q_i) = \frac{\varepsilon^n}{2^{in}} \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$.

1. Wir zeigen dass A integrierbar ist mit $v(A) \leq \varepsilon$.

Für $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, seien $A_k := \bigcup_{1 \leq j \leq k} Q_j$ und $f_k := 1_{A_k}$.

(1.1). Für jede $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, f_k ist eine Treppenfunktion: Seien $P_{k1}, \dots, P_{km}$ nichtleere paarweise disjunkte Quadern mit $A_k = \bigcup_{1 \leq j \leq m} P_{kj}$ und $P_{kj} \cap Q_i = \emptyset \vee P_{kj} \subset Q_i$ für $i \leq j \leq m$ und $1 \leq i \leq k$.

Dann $f_k = \sum_{j=1}^m 1_{P_{kj}}$. Ausserdem:

$$(1.1.2) \text{ Für } i \in \{1, \dots, k\}, \text{ sei } B_i := \{z_1, \dots, z_s \in \{1, \dots, m\} | P_{kz_1} \cup \dots \cup P_{kz_s} = Q_i\}. \text{ Dann}$$

$$\int f_k dx = \sum_{j=1}^m v(P_{kj}) \leq \sum_{i=1}^k [\sum_{j \in B_i} v(P_{kj})] =$$

$$\sum_{i=1}^k v(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) \underset{\text{nach 0}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

(1.2) Nach (1.1) und (1.1.2) folgt, dass jede f_k eine Treppenfunktion ist mit $\int f_k dx \leq \varepsilon$. Deswegen, da $(f_k)_{k \geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen ist, nach Satz von Levi gelten:

(1.2.1) Die Funktion $1_A = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ ist integrierbar.

(1.2.2) $v(A) = \int 1_A dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon$.

Also 1. gilt.

2. Nach Monotonie des Integrals, $0 < \frac{\varepsilon^n}{2^n} = v(Q_1) \leq v(A)$.

3. Da $\mathbb{Q}^n \subset A$ und $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist A auch dicht in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5.2.

Bemerkung(*): Für jede $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=1, \dots, m_n} Q_{nk}$, wo $K_n := \{Q_{nk} | k \in \{1, \dots, m_n\}\}$ die Komponenten von C_n sind. Durch eine einfache Induktion (über n), man beweist dass jede Q_{nk} ein Intervall der Länge $v(Q_{nk}) = \frac{1}{3^n}$ ist und dass $|K_n| = 2^n$. Also $K_n = \{Q_{nk} | 1 \leq k \leq 2^n\}$.

1.

z.z. C ist Abgeschlossen. (*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ die nach x konvergiert. Sei $i \in \mathbb{N}$. Dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in C_i ; da C_i Abgeschlossen ist, dann $C_i \ni x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dieses zeigt dass $\forall i \in \mathbb{N}. x \in C_i$. Also $x \in C$. Deshalb C ist Abgeschlossen.

Da C Abgeschlossen ist und $C \subset [0, 1]$, dann C ist Kompakt.

2.

Für jede $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=1, \dots, m_n} Q_{nk}$, wo $K_n = \{Q_{nk} | 1 \leq k \leq 2^n\}$ die Komponenten von C_n sind.

OBdA wir setzen voraus, dass die Elemente von Q_{ni} kleiner als die von $Q_{n(i+1)}$ sind (ganz formal: $\forall i, j \in \{1, 2^n\}. i < j \implies \forall x \in Q_{ni}. x < \min Q_{nj}$). Nach dieser Vereinbarung, zeigen wir nun dass C überabzählbar ist:

Sei $F := \{f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}\}$. Dann F ist überabzählbar. Für jede $f \in F$, sei Df die rekursiv definierte Folge:

$$(Df)(0) := \min C_0;$$

Nach Induktion Voraussetzung, $(Df)(n)$ wurde schon definiert und $Df(n) \in C_n$; d.h., es gibt genau ein $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ mit $(Df)(n) \in Q_{nk}$.

$$\text{Sei } (Df)(n+1) := \begin{cases} \min Q_{(n+1)z} & \text{falls } f(n+1) = 0 \\ \min Q_{(n+1)(z+1)} & \text{falls } f(n+1) = 1 \end{cases}, \text{ wo } P(Q_{nk}) = Q_{(n+1)z} \cup Q_{(n+1)(z+1)}.$$

(2.1) Df ist eine Cauchy Folge: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Dann für jede $m, l \geq n$

$(Df)(m), (Df)(l) \in Q_{nk}$ für irgendeine $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ und deswegen

$$|(Df)(m) - (Df)(l)| \leq v(Q_{nk}) = \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

(2.2) Nach der Definition von D , es folgt dass Df eine Folge von Elementen in C ist.

Sei $L: F \longrightarrow C$ gegeben durch $L(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} (Df)(i)$. Nach (2.1) die Folge Df ist Cauchy und deswegen, nach $\mathbb{R}$ Vollständigkeit, es konvergiert gegen ein x . Aber Nach 1. C ist Abgeschlossen, also $x \in C$. Dieses zeigt, dass L richtig definiert ist.

(2.3) L ist injektiv: Sei $f, g \in F$, mit $f \neq g$. Sei $N' := \min \{l \in \mathbb{N} | f(l) \neq g(l)\}$; dann $N' = N + 1$.

Außerdem, OBdA, nehmen wir an, dass $f(N+1) = 0$ und $g(N+1) = 1$. Dann

$(Df)(N) = (Dg)(N) \in Q_{nk}$ für irgendeine $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ und für $P(Q_{nk}) = Q_{(n+1)z} \cup Q_{(n+1)(z+1)}$,

es gilt $\forall s > N. (Df)(s) \in Q_{(n+1)z} \wedge (Dg)(s) \in Q_{(n+1)(z+1)}$; daraus folgt dass

$$\forall s, m > N. |(Dg)(s) - (Df)(s)| = (Dg)(s) - (Df)(s) > v(Q_{nk}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ und deswegen}$$

$$L(g) = \lim_{s > N} (Dg)(s) \geq \lim_{s > N} [(Df)(s) + \frac{1}{3^{n+1} \cdot 2}] = L(f) + \frac{1}{3^{n+1} \cdot 2} > L(f). \text{ So } L \text{ ist injektiv.}$$

Da F überabzählbar und L injektiv, ist C überabzählbar.

3.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so dass $(\frac{2}{3})^n < \varepsilon$. Dann

$C \subset C_n = \bigcup_{k=1, \dots, m_n} Q_{nk}$ und $v(C_n) = \sum_{k=1}^{m_n} v(Q_k) \stackrel{\text{Bemerkung (*)}}{=} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} < \varepsilon$. Deswegen, nach Satz 26 der Vorlesung, C ist eine Nullmenge.

Aufgabe 5.3.

Für diese Aufgabe wir benutzen die Gleichung aus Analysis I:

$$\int \sin^k(x) dx = -\frac{1}{k} \sin^{k-1}(x) \cos(x) + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2}(x) dx.$$

Für $k \geq 1$, die Nullstellen der Funktion $x \mapsto \sin^k(k\pi x)$ im Intervall $[0, 1]$ sind $\{\frac{l}{k} | l \in \{0, \dots, k\}\}$.

Falls k ungerade:

$$\|f_k\|_1 \stackrel{\text{Vorlesung Satz 7}}{=} \int_0^1 |\sin^k(k\pi x)| dx = \int_0^1 |\sin^k(k\pi x)| dx =$$

$$\sum_{l=0}^{k-1} \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{l+1}{k}} (-1)^l \sin^k(k\pi x) dx = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \frac{\sin^k(u)}{k\pi} du = \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin^k(u) du =$$

$$\frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \left[-\frac{1}{k} \sin^{k-1}(u) \cos(u) \right]_{l\pi}^{(l+1)\pi} + \frac{k-1}{k} \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin^{k-2}(u) du =$$

$$\frac{1}{k\pi} \frac{k-1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \left[\int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin^{k-2}(u) du \right] =, \text{ (nach Wiederholung dieselbe Idee)}$$

$$\frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \dots \frac{2}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [-\cos((l+1)\pi) + \cos(l\pi)] = \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \dots \frac{2}{k} \cdot 2k \leq \frac{4}{k\pi}$$

Fall k gerade

$$\|f_k\|_1 \stackrel{\text{Vorlesung Satz 7}}{=} \int_0^1 |\sin^k(k\pi x)| dx = \int_0^1 \sin^k(k\pi x) dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{k\pi} \sin^k(u) du =$$

$$\frac{1}{k\pi} \left[-\frac{1}{k} \sin^{k-1}(u) \cos(u) \right]_0^{k\pi} + \frac{k-1}{k} \int_0^{k\pi} \sin^{k-2}(u) dx =$$

$$\frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \int_0^{k\pi} \sin^{k-2}(u) dx =, \text{ (nach Wiederholung dieselbe Idee)}$$

$$\frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \dots \frac{1}{k} [k\pi - 0] = \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \dots \frac{1}{k} \cdot k\pi \leq \frac{1}{k}$$

Aus der vorherige Ergebnisse folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - 0\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_1 = 0$.

Aufgabe 5.4.

Für jede $N \in \mathbb{N}$, sei $F_N := \sum_{i=0}^N f_i$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann für $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq m$,

$$\|F_k - F_m\|_1 \stackrel{\text{Satz der Vorlesung}}{=} \int |F_k - F_m| dx = \int \left| \sum_{i=0}^k f_i - \sum_{i=0}^m f_i \right| dx =$$

$\int \left| \sum_{i=m+1}^k f_i \right| dx \leq \int \sum_{i=m+1}^k |f_i| dx = \sum_{i=m+1}^k \int |f_i| dx < \varepsilon$ für m gross genug. Dieses zeigt, dass $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in L^1 ist. So, nach Riez-Fisher Satz, F_k konvergiert in L^1 gegen eine integrierbare Funktion $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Ausserdem, (nochmal nach Riez-Fisher)

$$\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) dx = \int \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int F_k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k dx.$$